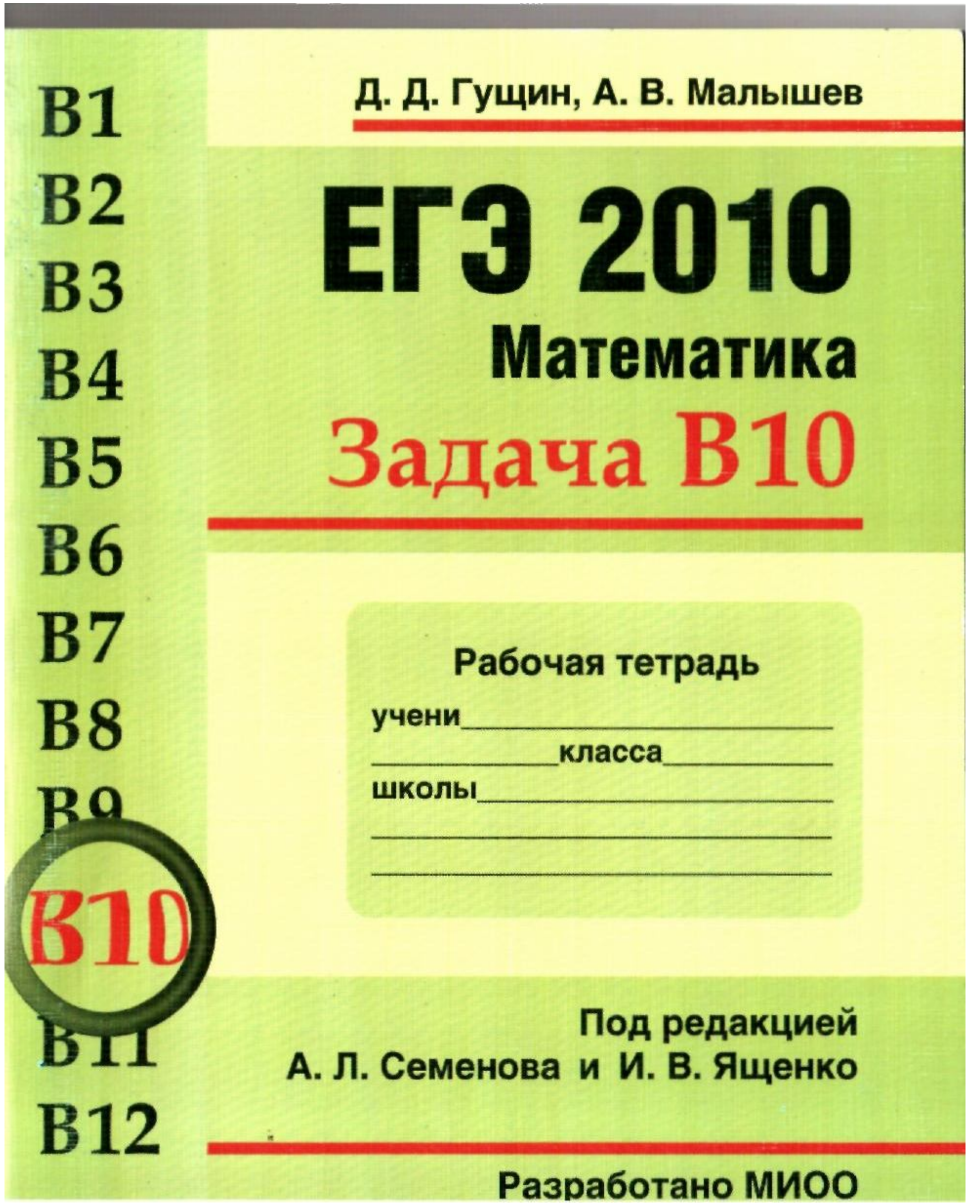


УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г98

Гущин Д. Д., Малышев А. В.

Г98 ЕГЭ 2010. Математика. Задача B10. Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2010. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-569-6

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2010. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы для успешной сдачи Единого государственного экзамена по математике в 2010 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2010.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по основным темам, связанным с решением текстовых задач с прикладным содержанием. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

Дмитрий Дмитриевич Гущин
Алексей Владимирович Малышев

ЕГЭ 2010. Математика. Задача B10. Рабочая тетрадь

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 09.12.2009 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 10000 экз. Заказ № 2180.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука"».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-569-6

От редакторов серии

Прежде чем вы начнете работать с нашими тетрадями, мы хотим дат
рые пояснения и советы.

Экзамен по математике в 2010 году состоит из двух частей: в пер
12 простых задач, в которых требуется краткий ответ (B1—B12); во вто
6 сложных задач, требующих развернутого решения (C1—C6).

Наши рабочие тетради организованы в соответствии с заданиями
и позволяют вам подготовиться к выполнению всех заданий этой ча
и устранить пробелы в своих знаниях.

Тем из вас, для кого главное — это набрать минимальный аттестаци
мы рекомендуем ориентироваться на устойчивое, безошибочное решен
из этой первой части. (Хотя в реальности минимальное число заданий, к
решить верно, может составить 5, но ведь вам нужно застраховаться
ошибки!) Эти 8 (или больше) заданий нужно выбрать исходя из того, ч
понимаете их условия, вам знаком материал и в школе вы хорошо справ
логичными заданиями (не обязательно в курсе математики 11 класса, а н
всего обучения). При этом следует в первую очередь уделять внимание т
которые у вас уже получаются, добиваясь максимально надежного их вы
ограничивая себя временем.

Те из вас, кто ориентируется на поступление в вуз, конечно, пони
желательно с высокой надежностью решать все задачи части B — ведь
такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет времени ме
задачу части C, жалко будет, если вы ошибетесь и потеряете нужный бал
добиваться уверенного выполнения всех заданий первой части, больш
уделяя тем задачам, которые вызывают наибольшие затруднения. Устра
лов в ваших знаниях поможет вам и в работе с заданиями части C. Опред
которое вы можете уверенно без ошибок выполнить все задания первой
планировать оставшееся время на экзамене на задания второй части.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической раб
Затем рекомендуется прочитать решения задач, сравнить свои реш
денными в книге. По тем задачам, которые вызвали затруднения, след
вторения материала по учебнику или с учителем выполнить тематическ

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соо
позиции ЕГЭ служат диагностические работы, приведенные в конце тет

Работа с серией рабочих тетрадей «ЕГЭ 2010. Математика» позволи
кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заме
тического повторения (изучения) курса математики!

Желаем успеха!

T7.4. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 33 с.

T7.5. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 6$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 14 с.

T7.6. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 42 с.

Введение

Не будет преувеличением сказать, что главная цель изучения наук в школе — понять, как устроен мир вокруг нас. Мир — в широком смысле этого слова: окружающая нас живая и неживая природа, общество, социально-экономические отношения, даже внутренний мир человека. Мы хотим понять окружающую нас действительность, а также научиться её моделировать, осознавать её поведение в прошлом, уметь прогнозировать в будущем.

Явления неживой природы обладают рядом особенностей, позволяющих достаточно точно описывать и предсказывать их поведение. Главные из этих особенностей — неизменность физических и химических законов во времени, а также найденные учёными относительно простые функциональные законы, описывающие приближённые модели таких систем. Поэтому одними из самых простых и в то же время наиболее важными естественнонаучными задачами являются задачи на анализ функциональных зависимостей.

Язык функций — удобное средство мироописания, особенно распространённое в физике и химии. Аппарат математической статистики, а также комбинаторики и теории вероятностей кроме этих наук используется в биологии, психологии, социологии, экономике и других областях знаний, в которых предполагаются анализ наблюдений, опытных данных, результатов измерений, тестов, опросов и пр.

Задания с прикладным содержанием, включённые в 2010 году в экзаменационные варианты ЕГЭ по математике под номером B10, представляют собой задачи на анализ явления, описываемого формулой функциональной зависимости. При этом явления, положенные в основу задачной фабулы, отобраны так, что соответствующие функции являются привычными для школьников: это линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая или тригонометрические функции.

Каждая из фабул представляет собой описание того или иного явления с указанием формулы, которой оно описывается, параметров и констант в этой формуле и необходимых единиц измерения. Все единицы измерения приведены в единой используемой в задаче системе единиц (СИ или СГС), и от учащихся не требуется перевода единиц измерения из одной системы в другую.

Решение предложенных задач условно можно разделить на несколько шагов:

а) анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров, констант или начальных условий, которые необходимо подставить в эту формулу;

б) математическая интерпретация задачи — сведение её к уравнению или неравенству и его решение;

в) анализ полученного решения.

Проиллюстрируем этот подход на нескольких примерах.

Задача 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по за

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броск секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение. Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течение является

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констан

Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к неравенству предпоч сведения к уравнению.

Способ 1. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 = 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 = 0 \iff \left[\begin{aligned} t &= 0{,}2; \\ t &= 1{,}4. \end{aligned}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи м снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0{,}2$ (с) мяч находился 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1{,}4$ (с) мяч находил высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее т 1,2 секунды.

Способ 2. Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» экв неравенству $h(t) \geqslant 3$. Решим его:

$$h(t) \geqslant 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 \geqslant 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 \leqslant 0 \iff 0{,}2 \leqslant t \leqslant 1,$$

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указан в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Примечание 1. Точных равенств в физике не бывает: все измерения о ются с какой-то погрешностью, а законы выполняются лишь с некоторой т Однако, решая уравнение и представляя себе ход того или иного процесса, м можем получить и решение соответствующего неравенства. (Вспомните тервалов для решения неравенств — он основан именно на этой идее.) В включённых в контрольно-измерительные материалы, рассматриваются то ции, обладающие свойствами, необходимыми для применения метода и Соответственно, любая из задач с прикладным содержанием может быть св к уравнению, либо к неравенству.

Выбор того или иного пути решения чаще всего будет обусловлен личными предпочтениями решающего. Из общих соображений можно сказать лишь, что решать уравнение, как правило, проще, чем неравенство, но интерпретация полученного решения иногда может быть затруднительна. В учебных целях мы предлагаем решать задачи двумя способами, вне зависимости от того, какой именно предпочтительнее в данной конкретной задаче.

Отметим также, что задания на решение иррациональных и тригонометрических неравенств не входят в действующий стандарт полного общего образования по математике базового уровня и не включаются в экзаменационные задания базового уровня. Мы рекомендуем рассмотрение соответствующих неравенств с учащимися, изучающими математику на профильном уровне.

Задача 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант. Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к уравнению предпочтительнее сведения к неравенству.

Способ 1. Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 = 0 \iff t^2 - 40t + 400 = 0 \iff t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Способ 2. Условие «вода будет вытекать из бака» эквивалентно неравенству $H(t) \geqslant 0$: пока высота столба воды больше нуля, вода будет вытекать из бака. Решим неравенство $H(t) \geqslant 0$:

$$H(t) \geqslant 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 \geqslant 0 \iff t^2 - 40t + 400 \geqslant 0 \iff (t-20)^2 \geqslant 0.$$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t. Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t = 20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.

Ответ: 20.

Задача 3. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба

воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = at^2 + bt + H_0,$$

где $H_0 = 4$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ и $b = -\frac{2}{5}$ — постоянные, t (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого врем будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с времени, является $H(t) = at^2 + bt + H_0$. В формулу требуется подставить в условии значения параметров a и b и начальный уровень воды H_0; получи

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4.$$

Этим задача свелась к предыдущей.

Примечание 2. Мы находим чрезвычайно важным подчеркнуть, что при формулы функциональных зависимостей не являются произвольными мат скими выражениями! Числовые коэффициенты в них имеют вполне опре физическую природу и связаны между собой. В действительности высота (столба жидкости, вытекающей из бака через кран небольшого диаметра, с течением времени по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, H_0 — нача сота столба воды в метрах, g — ускорение свободного падения в м/с^2, k — о площадей поперечных сечений крана и бака.

Тем самым задачи 2 и 3 — соответственно более или менее упрощённые ровки следующей задачи, которую можно предложить хорошо успевающим кам при подготовке к экзамену.

Задача 4. В боковой стенке высокого высокого цилиндрического бака у с закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при эт столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м ная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечен и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через с кунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объ (*Ответ*: 50.)

В дальнейшем большинство задач приводится в неупрощённом виде. В н ги дана вводная диагностическая работа, позволяющая определить степен сти учащихся к решению задач с прикладным содержанием. Далее разобран чи вводной диагностической работы; на каждый тип заданий приведены уп (тренировочные работы 1—8). В конце даны варианты итоговой проверки и контроля знаний (диагностические работы 1—3).

Круг задач, предлагаемых для подготовки к экзамену, достаточно широк: это и задачи с экономическим содержанием, и задачи о тепловом расширении тел, о сокращении длины быстро движущихся ракет, об определении глубин колодцев и об исследовании температуры звёзд, о проектировании подводных аппаратов, о скейтбордистах, автогонщиках, тракторах и даже о водолазных колоколах. Все эти задачи размещены в открытом доступе на сайте http://mathege.ru.

Научиться решать задачи — одна из важнейших целей образования. Овладеть математическими знаниями, позволяющими описывать окружающий нас мир, научиться составлять, анализировать и интерпретировать соответствующие математические модели — наиважнейшая цель математического образования. Помочь в этом нелёгком труде и призвана наша книжка.

Санкт-Петербург, 2009

Диагностическая работа

Ответами на задания диагностической работы должны быть целые числа или конечные десятичные дроби. Единицы измерений в ответы писать не нужно.

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1+\alpha\cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12\cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 60°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T(°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{Вт}{°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos\alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg}\alpha,$$

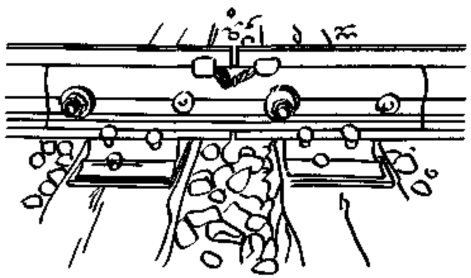
где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Задачи, приводящие к линейным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 1 диагностической работы

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$l(t^\circ) - l_0 = 3 \text{ (мм)}$$

при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^\circ = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25 \text{ °C}.$$

Ответ: 25.

Тренировочная работа 1

Т1.1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Т1.2. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Т1.3. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Т1.4. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Т1.5. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле:

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 500 000 руб.

Т1.6. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле:

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 600 000 руб.

Т1.7. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле:

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 300 000 руб.

Т1.8. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 400$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 200\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях,

вычисляется по формуле:

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 400 000 руб.

Т1.9. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = 5t^2,$$

где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах, прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Т1.10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = 5t^2,$$

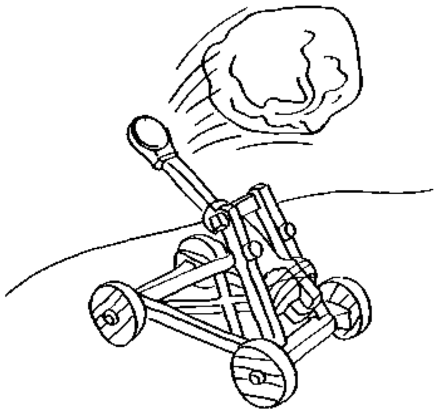
где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах, прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 2 диагностической работы

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?



Решение. Задача сводится к решению неравенства $y \geqslant 9$: при заданных значениях параметров a и b

$$y \geqslant 9 \iff -\frac{1}{100}x^2 + x \geqslant 9 \iff$$
$$\iff x^2 - 100x + 900 \leqslant 0 \iff 10 \leqslant x \leqslant 90 \text{ м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.

Ответ: 90.

Рассмотрим ещё два примера.

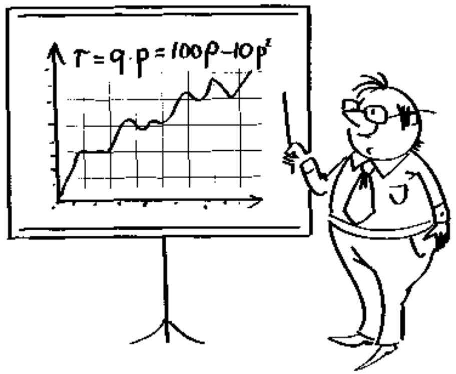
2а. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 100 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.



Решение. Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geqslant 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geqslant 240 \iff 10p^2 - 100p + 240 \leqslant 0 \iff$$
$$\iff p^2 - 10p + 24 \leqslant 0 \iff 4 \leqslant p \leqslant 6.$$

Ответ: 6.

2б. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geqslant 0$: при заданной длине верёвки $L = 0{,}441$ м

$$P \geqslant 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geqslant 0 \overset{m>0}{\Leftrightarrow} \frac{v^2}{0{,}441} - 10 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 \geqslant 4{,}41 \overset{v>0}{\Leftrightarrow} v \geqslant 2{,}1 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2,1.

Тренировочная работа 2

Т2.1. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 60 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Т2.2. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 85 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Т2.3. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 70 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Т2.4. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 160 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Т2.5. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,4 м? Ответ выразите в м/с.

Т2.6. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,625 м? Ответ выразите в м/с.

Т2.7. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м? Ответ выразите в м/с.

Т2.8. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,784 м? Ответ выразите в м/с.

Т2.9. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{60}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{6}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Т2.10. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{160}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{8}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 14 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Т2.11. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Т2.12. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{25}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{5}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Т2.13. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}4 + 9t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Т2.14. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}2 + 10t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Т2.15. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1 + 11t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Т2.16. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}8 + 12t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее четырёх метров?

Т2.17. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{500}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

Т2.18. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

Т2.19. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}\cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

Т2.20. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}\cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

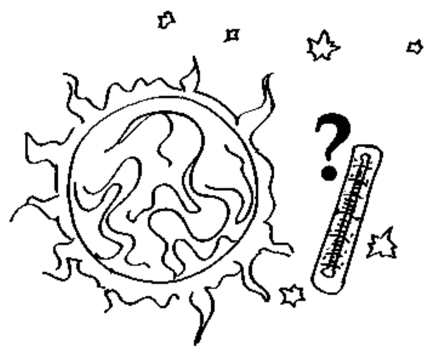
где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

Задачи, приводящие к степенным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 3 диагностической работы

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12\cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$P \geqslant 9{,}12\cdot 10^{25}$$

при известном значении постоянной $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20}$ м^2:

$$P \geqslant 9{,}12\cdot 10^{25} \Leftrightarrow \sigma S T^4 \geqslant 9{,}12\cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 \geqslant \frac{9{,}12\cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T \geqslant \sqrt[4]{\frac{9{,}12\cdot 10^{25}}{5{,}7\cdot 10^{-8}\cdot \frac{1}{16}\cdot 10^{20}}} \Leftrightarrow T \geqslant \sqrt[4]{256\cdot 10^{12}} = 4000 \text{ К}.$$

Ответ: 4000.

Решение задачи 3 диагностической работы

Рассмотрим ещё одну задачу.

3а. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выраженная в ньютонах, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — длина ребра куба в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78 400 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$F_A \leqslant 78\,400$$

при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$FA \leqslant 78\,400 \Leftrightarrow 1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 78\,400 \Leftrightarrow l^3 \leqslant 8 \Leftrightarrow l \leqslant 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: 2.

Тренировочная работа 3

Т3.1. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 9800 Н? Ответ выразите в метрах.

Т3.2. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 264,6 Н? Ответ выразите в метрах.

Т3.3. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 627,2 Н? Ответ выразите в метрах.

Т3.4. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле:

$$F_{\text{А}} = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 1225 Н? Ответ выразите в метрах.

Т3.5. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{228} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{64} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $2{,}28 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.7. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{128} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}14 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.8. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{729} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $5{,}13 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.9. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{243} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}539 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

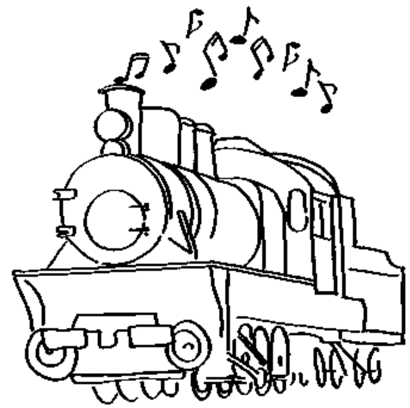
где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{4} \cdot 10^{18}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}425 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Задачи, приводящие к рациональным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 4 диагностической работы

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ выразите в м/с.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$f(v) - f_0 \geqslant 10$$

при известном значении постоянной $f_0 = 440$ Гц:

$$f(v) - f_0 \geqslant 10 \Leftrightarrow \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geqslant 10 \Leftrightarrow \frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geqslant 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{v}{315} \leqslant \frac{44}{45} \Leftrightarrow v \geqslant \frac{315}{45} = 7 \text{ м/с}.$$

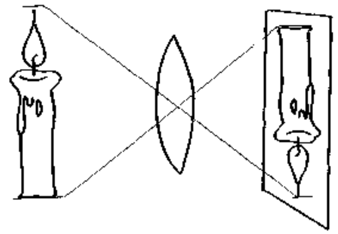
Ответ: 7.

Рассмотрим ещё одну задачу.

4а. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.



Решение. Поскольку $f = 30$, имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см}.$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

Тренировочная работа 4

Т4.1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.2. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 240 до 280 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 40 до 65 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 170 до 200 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.5. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 590$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Т4.6. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 245$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Т4.7. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 190$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Т4.8. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 295$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Т4.9. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

Т4.10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r},$$

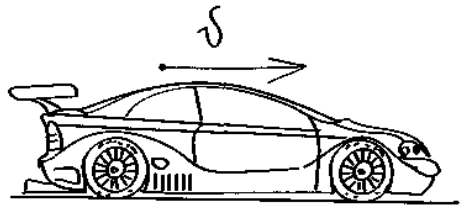
где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20 % от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

Задачи, приводящие к иррациональным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 5 диагностической работы

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.



Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км:

$$\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10\,000 \Leftrightarrow a \geqslant 5000 \text{ км/ч}^2.$$

Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2.

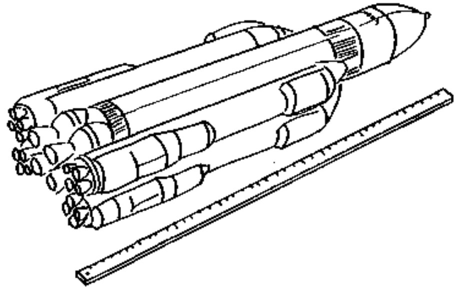
Ответ: 5000.

Рассмотрим ещё одну задачу.

5а. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.



Решение. Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 10$ м и известной величине скорости света $c = 3\cdot10^5$ км/с:

$$10\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot10^{10}}} = 8 \Leftrightarrow \frac{v^2}{9\cdot10^{10}} = \frac{36}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{6}{10}\cdot3\cdot10\cdot10^5 \Leftrightarrow v = 180\,000 \text{ км/с}.$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180 000.

Тренировочная работа 5

Т5.1. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 110 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Т5.2. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Т5.3. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Т5.4. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Т5.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

Т5.6. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 6 м? Ответ выразите в км/с.

Т5.7. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 3 м? Ответ выразите в км/с.

Т5.8. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 15$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 9 м? Ответ выразите в км/с.

Т5.9. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.

Т5.10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

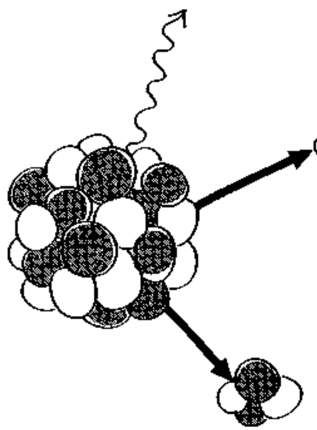
где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4,8 километра? Ответ выразите в метрах.

Задачи, приводящие к показательным уравнениям или неравенствам. Решение задачи 6 диагностической работы

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$m(t) > 10$$

при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

$$40 \cdot 2^{-t/10} > 10 \iff 2^{-t/10} > 2^{-2} \iff -\frac{t}{10} > -2 \iff t < 20 \text{ мин.}$$

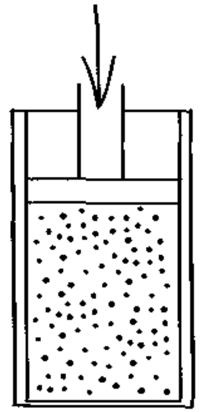
Ответ: 20.

Рассмотрим ещё одну задачу.

6а. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$p(V) \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6$$

при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5$ Па$\cdot$м^5:

$$10^5 \cdot V^{-5/3} \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6 \iff V^{5/3} \leqslant \frac{1}{32} \iff \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \iff V \leqslant \frac{1}{8} \text{ м}^3.$$

Ответ: 0,125.

Тренировочная работа 6

Т6.1. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 200$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $6{,}25 \cdot 10^5$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.2. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 3{,}2 \cdot 10^4$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3{,}125 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.3. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^4, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $1{,}6 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.4. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 2 \cdot 10^3$ Па $\cdot$ м^4, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $1{,}25 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.5. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили газ, содержащий $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 5 мг?

Т6.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили газ, содержащий $m_0 = 16$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 2 мг?

Т6.7. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в часах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 80$ мкг изотопа натрия-24, период полураспада которого $T = 15$ ч. В течение скольких часов масса изотопа натрия-24 будет не меньше 10 мкг?

Т6.8. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 2,5 мг?

Т6.9. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде

$$pV^a = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит не менее чем к четырёхкратному увеличению давления?

Т6.10. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде

$$pV^a = \text{const},$$

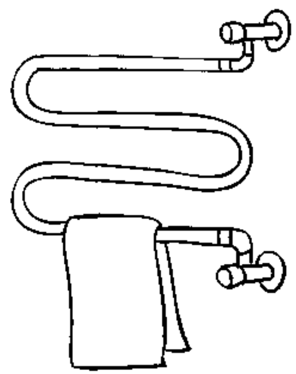
где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит не менее чем к двукратному увеличению давления?

Задачи, приводящие к логарифмическим уравнениям или неравенствам. Решение задачи 7 диагностической работы

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 60°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T(°C), причём

$$x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200\ \frac{Дж}{кг\cdot°C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\ \frac{Вт}{°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?



Решение. Задача сводится к решению уравнения $x = 84$ при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α:

$$x = 84 \Leftrightarrow \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7\cdot\frac{4200\cdot 0{,}3}{21}\cdot\log_2\frac{60-20}{T-20} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{40}{T-20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T-20} = 4 \Leftrightarrow T - 20 = 10 \Leftrightarrow T = 30°C.$$

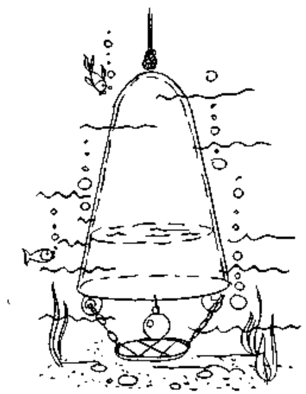
Ответ: 30.

Рассмотрим ещё одну задачу.

7а. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?



Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \leqslant 20\,700$ при заданных значениях количества воздуха, его начального давления и температуры, а также постоянной α:

$$A \leqslant 20\,700 \iff \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leqslant 20\,700 \iff$$

$$\iff 5{,}75 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 20\,700 \iff$$

$$\iff \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 3 \iff 0 < \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 8 \iff 0 < p_2 \leqslant 9{,}6.$$

Ответ: 9,6.

Тренировочная работа 7

Т7.1. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 100°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}4$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T (°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200 \ \frac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 42 \ \frac{Вт}{°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Т7.2. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 15°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 65°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}6$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 28$ м, вода охлаждается до температуры T (°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200 \ \frac{Дж}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \ \frac{Вт}{°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Т7.3. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 18$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 11 с.

Т7.4. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 33 с.

Т7.5. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 6$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 14 с.

Т7.6. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 42 с.

Т7.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 40$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Т7.8. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 4$ моля воздуха объёмом $V_1 = 60$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 6900 Дж?

Т7.9. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж?

Т7.10. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 6$ молей воздуха при давлении $p_1 = 2{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 350 Дж?

Задачи, приводящие к тригонометрическим уравнениям или неравенствам. Решения задач 8—10 диагностической работы

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$t(\alpha) \geqslant 3$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 30$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geqslant 3 \iff \sin\alpha \geqslant \frac{1}{2} \overset{0°<\alpha<90°}{\iff} 30° \leqslant \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos\alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$u \geqslant 0{,}25$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geqslant 0{,}25 \iff \frac{m}{m+M} v \cos\alpha \geqslant 0{,}25 \iff$$

$$\iff \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos\alpha \geqslant 0{,}25 \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}\cos\alpha \geqslant \frac{1}{4} \overset{0°<\alpha<90°}{\iff} 0° < \alpha \leqslant 60°.$$

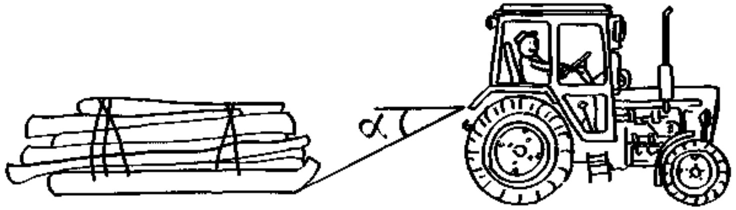
Ответ: 60.

Рассмотрим ещё одну задачу.

9а. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 50$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$A \geqslant 2000$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geqslant 2000 \iff 80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \geqslant 2000 \iff$$

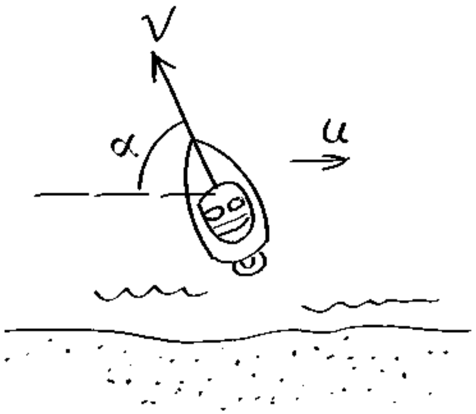
$$\iff \cos\alpha \geqslant \frac{1}{2} \overset{0°<\alpha<90°}{\iff} 0° < \alpha \leqslant 60°.$$

Ответ: 60.

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега. Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 200$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях ширины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0{,}5$ м/с:

$$\frac{100}{0{,}5}\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 200 \iff \operatorname{ctg}\alpha \leqslant 1 \overset{0°<\alpha<90°}{\iff} 45° \leqslant \alpha < 90°.$$

Ответ: 45.

Тренировочная работа 8

T8.1. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

T8.2. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше одной секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

T8.3. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

T8.4. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,6 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Т8.5. Трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 120$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 3000 кДж?

Т8.6. Трактор тащит сани с силой $F = 100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 50$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2500 кДж?

Т8.7. Трактор тащит сани с силой $F = 100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 60$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 3000 кДж?

Т8.8. Трактор тащит сани с силой $F = 70$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 100$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 3500 кДж?

Т8.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 5$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 420$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,4 м/с?

Т8.10. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha,$$

где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 375$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Т8.11. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3{,}2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha,$$

где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,3 м/с?

Т8.12. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 5$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 320$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Т8.13. Катер должен пересечь реку шириной $L = 80$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 2$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 40 с? Ответ дайте в градусах.

Т8.14. Катер должен пересечь реку шириной $L = 70$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким максимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 140 с? Ответ дайте в градусах.

Т8.15. Катер должен пересечь реку шириной $L = 120$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}6$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Т8.16. Катер должен пересечь реку шириной $L = 75$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким максимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 150 с? Ответ дайте в градусах.

Т8.17. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 150\,°/\text{с}$, фаза $\varphi = -30°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Т8.18. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 240\,°/\text{с}$, фаза $\varphi = -30°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Т8.19. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, направленная вверх перпендикулярно плоскости и равная $F_л = qvB\sin\alpha$ (Н). При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°; 180°]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была больше $3 \cdot 10^{-8}$ Н?

Т8.20. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 6 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, направленная вверх перпендикулярно плоскости и равная $F_л = qvB\sin\alpha$ (Н). При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°; 180°]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была больше $9 \cdot 10^{-8}$ Н?

Диагностическая работа 1

Ответами на задания проверочных работ должны быть целые числа или конечные десятичные дроби. Единицы измерений в ответы писать не нужно.

Д1.1. При температуре 0°С рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Д1.2. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 130 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 360 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Д1.3. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле:

$$F_\mathrm{A} = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ Н/кг). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78,4 Н? Ответ выразите в метрах.

Д1.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 40 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах

от 200 до 240 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Д1.5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Д1.6. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \mathrm{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\mathrm{const} = 1{,}6 \cdot 10^5$ Па$\cdot$м^4, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $6{,}25 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Д1.7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_\text{п} = 25^\circ$С, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_\text{в} = 49^\circ$С. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 66$ м, вода охлаждается до температуры $T(^\circ\mathrm{C})$, причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_\text{в} - T_\text{п}}{T - T_\text{п}},$$

где $c = 4200$ $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{С}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21$ $\frac{\text{Вт}}{{}^\circ\text{С}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Д1.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Д1.9. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 80$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 3200 кДж?

Д1.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 60$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}3$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Диагностическая работа 2

Д2.1. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 75 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Д2.2. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,6 м? Ответ выразите в м/с.

Д2.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{125} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $4{,}56 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Д2.4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 390$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 320$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Д2.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 25$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 24 м? Ответ выразите в км/с.

Д2.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0\cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 20$ мг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 10 мг?

Д2.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 18$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 980 Дж?

Д2.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,9 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Д2.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 8$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 490$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д2.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 1{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким максимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 60 с? Ответ дайте в градусах.

Диагностическая работа 3

Д3.1. При температуре 0 °С рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Д3.2. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,225 м? Ответ выразите в м/с.

Д3.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{648} \cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}824 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Д3.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 60 до 80 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 120 до 150 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Д3.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 50$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 48 м? Ответ выразите в км/с.

Д3.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 100$ мкг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 12,5 мкг?

Д3.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 980 Дж?

Д3.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Д3.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos\alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 350$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д3.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}8$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 56). Под каким максимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 125 с? Ответ дайте в градусах.

Ответы

Диагностическая работа

1. 25. **2.** 90. **3.** 4000. **4.** 7. **5.** 5000. **6.** 20. **7.** 30. **8.** 30. **9.** 60. **10.** 45.

Тренировочная работа 1

1. 37,5. **2.** 50. **3.** 75. **4.** 25. **5.** 4000. **6.** 5000. **7.** 4000. **8.** 3000. **9.** 1. **10.**

Тренировочная работа 2

1. 8. **2.** 12. **3.** 8. **4.** 10. **5.** 2. **6.** 2,5. **7.** 2,7. **8.** 2,8. **9.** 60. **10.** 120.
12. 25. **13.** 1,4. **14.** 1,6. **15.** 1,8. **16.** 2. **17.** 500. **18.** 200. **19.** 300. **20.** 400.

Тренировочная работа 3

1. 1. **2.** 0,3. **3.** 0,4. **4.** 0,5. **5.** 5000. **6.** 4000. **7.** 4000. **8.** 4000. **9.** 9000. **10**

Тренировочная работа 4

1. 35. **2.** 42. **3.** 40. **4.** 50. **5.** 5. **6.** 6. **7.** 15. **8.** 5. **9.** 4. **10.** 8.

Тренировочная работа 5

1. 6050. **2.** 7200. **3.** 4500. **4.** 6250. **5.** 180 000. **6.** 240 000. **7.** 240 000. **8.** 2
9. 1,25. **10.** 1,8.

Тренировочная работа 6

1. 0,008. **2.** 0,064. **3.** 0,125. **4.** 0,008. **5.** 30. **6.** 30. **7.** 45. **8.** 8. **9.** 2. **10.**

Тренировочная работа 7

1. 30. **2.** 40. **3.** 9. **4.** 2,25. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 5. **8.** 30. **9.** 6. **10.** 5.

Тренировочная работа 8

1. 30. **2.** 30. **3.** 30. **4.** 30. **5.** 60. **6.** 60. **7.** 60. **8.** 60. **9.** 60. **10.** 60.
12. 60. **13.** 45. **14.** 45. **15.** 45. **16.** 45. **17.** 60. **18.** 50. **19.** 30. **20.** 30.

Диагностические работы

Диагностическая работа 1

1. 50. **2.** 9. **3.** 0,2. **4.** 48. **5.** 12 500. **6.** 0,064. **7.** 37. **8.** 30. **9.** 60. **10.** 45.

Диагностическая работа 2

1. 9. **2.** 4. **3.** 10 000. **4.** 8. **5.** 84 000. **6.** 2. **7.** 4,5. **8.** 30 **9.** 60. **10.** 45.

Диагностическая работа 3

1. 25. **2.** 3,5. **3.** 12 000. **4.** 75. **5.** 84 000. **6.** 6. **7.** 3. **8.** 30. **9.** 60. **10.** 45.