

Система оценивания экзаменационной работы по алгебре

В 2008 г. для оценивания экзаменационных работ предлагаются две модели по выбору региона. Они различаются подходами к **начислению баллов за выполнение заданий части 2**. Модель 1 использовалась в предыдущие годы. В соответствии с ней учащийся, демонстрирующий умение решить ту или иную задачу второй части получает установленный балл, или балл, на 1 меньше установленного (в случае, если решение содержит несущественный недочет или даже несущественную ошибку); поэлементное оценивание не предусматривается. Модель 2 предлагается впервые. В ней предусмотрено выставление баллов за выполнение заданий второй части по «непрерывной» шкале: в зависимости от полноты и правильности решения учащемуся может быть засчитан не только установленный балл, но и «частичный» балл, вплоть до 1. Подходы к выполнению заданий части 1 в этих моделях совпадают.

Ниже приводится описание системы оценивания для каждой из моделей отдельно.

Модель 1

Для оценивания результатов выполнения работ учащимися используются два количественных показателя: традиционная отметка по пятибалльной шкале и так называемый общий балл (рейтинг); назначение общего балла – расширение диапазона традиционных отметок и введение большего числа градаций для дифференциации учащихся по уровням подготовки.

Общий балл формируется путем суммирования баллов, полученных учащимся за выполнение первой и второй частей работы. За каждое верно решенное задание *первой части* учащемуся начисляется 0,5 балла. Задания *второй части* имеют разный вес в зависимости от их относительной сложности в работе: задание 17 – 2 балла, задания 18 и 19 – 4 балла, задания 20 и 21 – 6 баллов. Система формирования общего балла приводится в таблице 1.

Таблица 1. Система формирования общего балла

Максимальное количество баллов за одно задание						Максимальное количество баллов		
Часть 1, задания №1-16	Часть 2					За Часть 1	За Часть 2	За работу в целом
	задание №17	задание №18	задание №19	задание №20	задание №21	1	2	
0,5	2	4	4	6	6	8	22	30

Задание первой части считается выполненным верно, если в бланке с заданиями обведен номер верного ответа (в заданиях с выбором ответа), или вписан верный ответ (в заданиях с кратким ответом или задании на соотнесение).

Задание второй части считается выполненным верно, если учащийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. Если в решении допущена ошибка, не носящая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного. Другие возможности не предусматриваются.

Такой подход в методике оценивания выполнения заданий второй части связан с трактовкой качественных свойств, на измерение которых она направлена: способность к интеграции знаний из различных разделов курса алгебры, владение широким набором приемов и способов рассуждений, умение математически грамотно и ясно записать решение. Исследуемые качества проявляются, только если учащийся обнаруживает умение решить задачу предложенного уровня и содержания. Поэлементное оценивание выполнения задания не дает возможности оценить именно эти качества и отразить их наличие у учащегося в его интегральной оценке. Случаи, в которых ошибки или недочеты, допущенные учащимся, можно признать не влияющими на общий верный ход решения, и когда предложенное решение можно оценить положительно со снятием одного балла, описываются по каждому конкретному заданию в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Для получения положительной оценки ученику достаточно за 60 минут выполнить верно 8 заданий первой части работы¹. Именно это принимается за минимальный критерий соответствия подготовки ученика уровню базовых требований. (Как видно из сказанного, кроме фиксированного числа заданий, обязательных для выполнения, минимальный критерий включает и параметр времени, являющийся весьма существенной характеристикой подготовленности ученика). Если учащийся не подтверждает наличия у него базовой подготовки, то это является основанием для выставления ему неудовлетворительной оценки. В этом случае результат учащегося не компенсируется выполнением заданий второй части, общий балл в его оценке не указывается. При положительной оценке работы ученику выставляется отметка «3», «4» или «5» и общий балл.

Модель 2

Для оценивания результатов выполнения работ учащимися применяются два количественных показателя: традиционная отметка по пятибалльной шкале и так называемый общий балл (рейтинг); назначение общего балла – расширение диапазона традиционных отметок и введение

¹ В 2008 г., на этапе освоения на практике новой формы итоговой аттестации это время по решению региона может быть увеличено до 90 минут.

большого числа градаций для дифференциации учащихся по уровням подготовки.

Общий балл формируется путем суммирования баллов, полученных учащимся за выполнение первой и второй частей работы. За каждое верно решенное задание *первой части* учащемуся начисляется 0,5 балла. Задания *второй части* имеют разный вес в зависимости от их относительной сложности в работе: задание 17 – 2 балла, задания 18 и 19 – 3 балла, задания 20 и 21 – 4 балла. Система формирования общего балла приводится в таблице 3.

Таблица 3. Система формирования общего балла.

Максимальное количество баллов за одно задание						Максимальное количество баллов		
Часть 1	Часть 2					За часть 1	За часть 2	За работу в целом
задания №1-16	задание №17	задание №18	задание №19	задание №20	задание №21			
0,5	2	3	3	4	4	8	16	24

Задание первой части считается выполненным верно, если в бланке с заданиями обведен номер верного ответа (в заданиях с выбором ответа), или вписан верный ответ (в заданиях с кратким ответом или задании на соотнесение).

В результате выполнения второй части в зависимости от полноты и правильности решения учащийся может получить за задание №17 – 1 или 2 балла, за задания №18 и №19 – от 1 до 3 баллов, за задания №20 и №21 – от 1 до 4 баллов. При этом задание засчитывается учащемуся с выставлением того или иного положительного балла только в том случае, когда из работы можно сделать вывод о том, что он понимает идею решения.

Для получения положительной оценки ученику достаточно за 60 минут выполнить верно 8 заданий первой части работы². Именно это принимается за минимальный критерий соответствия подготовки ученика уровню базовых требований. (Как видно из сказанного, кроме фиксированного числа заданий, обязательных для выполнения, минимальный критерий включает и параметр времени, являющийся весьма существенной характеристикой подготовленности ученика). Если учащийся не подтверждает наличия у него базовой подготовки, то это является основанием для выставления ему неудовлетворительной оценки. В этом случае результат учащегося не компенсируется выполнением заданий второй части, общий балл в его оценке не указывается. При положительной оценке работы ученику выставляется отметка «3», «4» или «5» и общий балл.

² В 2008 г., на этапе освоения на практике новой формы итоговой аттестации это время по решению региона может быть увеличено до 90 минут.

Ответы к заданиям демонстрационного варианта по алгебре

Ответы к заданиям части 1

Задания 1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 15 считаются выполненными при условии, если обведен только один номер верного ответа. Если обведены и не перечеркнуты два и более ответов, в том числе правильный, то ответ не засчитывается.

Задания 4, 7, 9, 10, 13, 16 считаются выполненными, если экзаменуемым записан ответ, соответствующий эталону.

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	3	9	$-\frac{4}{3}; 2$
2	2	10	(1,4; 3,6)
3	1	11	3
4	1,5	12	4
5	3	13	A2, B4, B3
6	1	14	2
7	3	15	3
8	1	16	A, на 5 тыс.

Ответы к заданиям части 2

№ задания	Ответ
17	$\frac{x-1}{x}$
18	(8; -1), (-2; 4).
19	7216
20	$1 < a < 3$
21	в отношении 4 : 1

Критерии проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом

Модель 1

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным, содержать рассмотрение всех возможных случаев (если таковые имеются), из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Некоторые задания допускают различные способы решения, и решение ученика может отличаться от приведенных ниже.

За полное и правильное выполнение задания учащемуся засчитывается балл, который приписан этому заданию. Если в решении допущена описка или ошибка, не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного.

В описании критериев оценки выполнения конкретных заданий содержатся примеры ошибок/описок, позволяющих засчитывать балл, на 1 меньший указанного. Они, однако, не исчерпывают всех возможных ошибок такого рода. При проверке работ предметной комиссии в ряде случаев придется принимать решение, как квалифицировать тот или иной недочет учащегося.

Решения и критерии оценивания заданий

Задания 17 – 21 выполняйте с записью решения

17. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

//Ответ: $\frac{x-1}{x}$.

//Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2 - 3x - 2$: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{5}$. Имеем:

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{5(x-1)(x+\frac{2}{5})}{x(5x+2)} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

Замечание. Учащийся может разложить на множители трехчлен каким-либо иным способом. Например: $5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x-1) + 2(x^2 - 1) = (x-1)(3x+2(x+1))$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена одна ошибка в знаках при разложении на множители квадратного трехчлена, например, записан множитель $(x+1)$.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = -8 \\ (x-4)(y-2) = -12 \end{cases}$.

//Ответ: (8; -1), (-2; 4). Возможна запись ответа в другом виде, например, $x_1 = 8$, $y_1 = -1$; $x_2 = -2$, $y_2 = 4$.

//Решение. Преобразуем второе уравнение системы $(x-4)(y-2)=-12$ к виду $xy-4y-2x+8=-12$. Подставим в него $xy=-8$. Выполнив преобразования, получим систему:
$$\begin{cases} xy = -8 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $(8; -1), (-2; 4)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Найден правильный ход решения, все его шаги выполнены верно и получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, но допущена одна ошибка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Другое возможное решение.

Выразим из первого уравнения одну из переменных через другую, например, $y = -\frac{8}{x}$. Подставим $y = -\frac{8}{x}$ во второе уравнение системы, получим уравнение $\frac{4x-16}{x} + x = 10$.

Решим его и найдем соответствующие значения y , получим: $(8; -1), (-2; 4)$.

19. Арифметическая прогрессия задана формулой n -го члена $a_n = 5n + 1$. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по пятьдесят пятый включительно.

//Ответ: 7216.

//Решение.

Обозначим искомую сумму через S , тогда $S = S_{55} - S_{14}$.

Найдем S_{55} и S_{14} . Имеем: $a_1 = 6$, $a_{14} = 5 \cdot 14 + 1 = 71$, $a_{55} = 5 \cdot 55 + 1 = 276$;

$$S_{55} = \frac{(6+276) \cdot 55}{2} = 7755, \quad S_{14} = \frac{(6+71) \cdot 14}{2} = 539.$$

Таким образом, $S = 7755 - 539 = 7216$.

Замечание. Возможно использование другой формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для этого учащиеся должны установить, что разность прогрессии равна 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно найден способ решения и получен верный ответ.
3	При правильном ходе решения и верном использовании формул допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом дальнейшее решение выполнено верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в применении формул относятся к числу существенных, при их наличии выставляется 0 баллов.

Другое возможное решение. Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{15} , а последний равен a_{55} . Имеем:

$$a_{15} = 76, a_{55} = 276, n = 55 - 14 = 41; S = \frac{(76 + 276) \cdot 41}{2} = 7216.$$

20. Найдите все значения a , при которых неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

//Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

//Решение.

График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

$$\text{Имеем: } D_1 = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0.$$

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Найден правильный способ решения, все его шаги выполнены верно, решение содержит пояснения, получен правильный ответ. В качестве пояснений учащийся может использовать и графическую иллюстрацию.
5	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка, например, при определении знаков корней, или ошибка в преобразовании дискриминанта, но при этом решение доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена или в применении алгоритма решения квадратного неравенства являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

21. Имеются два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 35%, а во втором – 60% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота?

//Ответ: в отношении 4 : 1. Ответ может быть дан и в другом виде, например, $\frac{x}{y} = 4$.

//Решение. Пусть x – масса первого сплава, y – масса второго сплава. Тогда количество золота в первом сплаве составляет $0,35x$, а во втором – $0,6y$. Масса нового сплава равна $x + y$, а количество золота в нем составляет $0,4(x + y)$. Получим уравнение $0,35x + 0,6y = 0,4(x + y)$.

После преобразований получим $35x + 60y = 40x + 40y$, $x = 4y$. Отсюда: $x : y = 4 : 1$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Правильно составлено уравнение, при этом приведены необходимые пояснения, дан верный ответ.
5	Правильно составлено уравнение, приведены необходимые пояснения, дан верный ответ, но: допущена вычислительная ошибка и в результате получено другое отношение; или из равенства $x = 4y$ неверно найдено отношение $x:y$; или отсутствуют какие-либо пояснения.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Если в ответе указано отношение $y : x = 1 : 4$, то такой ответ может быть принят.

Критерии проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом ***Модель 2***

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным, содержать рассмотрение всех возможных случаев (если таковые имеются), из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Некоторые задания допускают различные способы решения, и решение ученика может отличаться от приведенных ниже.

Общие подходы к формированию критериев оценивания следующие. Задание засчитывается учащемуся с выставлением того или иного положительного балла только в том случае, когда из работы можно сделать вывод о том, что он понимает идею решения. В зависимости от полноты и правильности решения учащийся может получить за задание №17 – 1 или 2 балла, за задания №18 и №19 – от 1 до 3 баллов, за задания №20 и №21 – от 1 до 4 баллов.

Решения и критерии оценивания заданий

Задания 17 – 21 выполняйте с записью решения

17. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

//Ответ: $\frac{x-1}{x}$

//Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2 - 3x - 2 : x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{5}$. Имеем:

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{5(x-1)(x+\frac{2}{5})}{x(5x+2)} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

Замечание. Учащийся может разложить на множители трехчлен каким-либо иным способом. Например: $5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x-1) + 2(x^2 - 1) = (x-1)(3x+2(x+1))$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена одна ошибка в знаках при разложении на множители квадратного трехчлена, например, записан множитель $(x+1)$, решение при этом доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = -8 \\ (x-4)(y-2) = -12 \end{cases}$.

//Ответ: (8; -1), (-2; 4). Возможна запись ответа в другом виде, например, $x_1 = 8, y_1 = -1; x_2 = -2, y_2 = 4$.

//Решение.

Преобразуем второе уравнение системы $(x-4)(y-2) = -12$ к виду $xy - 4y - 2x + 8 = -12$. Подставим в него $xy = -8$. Выполнив преобразования, получим систему: $\begin{cases} xy = -8 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим: (8; -1), (-2; 4).

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Найден правильный ход решения, все его шаги выполнены верно и получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но на последнем этапе решения допущена одна ошибка вычислительного характера.
1	Ход решения правильный (а именно, получена система, равносильная данной), но далее допущена техническая ошибка, которая привела к громоздким вычислениям, и в силу этого решение не было доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Другое возможное решение.

Выразим из первого уравнения одну из переменных через другую, например, $y = -\frac{8}{x}$. Подставим $y = -\frac{8}{x}$ во второе уравнение системы, получим уравнение $\frac{4x-16}{x} + x = 10$.

Решим его и найдем соответствующие значения y , получим: $(8; -1), (-2; 4)$.

19. Арифметическая прогрессия задана формулой n -го члена $a_n = 5n + 1$.

Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по пятьдесят пятый включительно.

//Ответ: 7216.

//Решение.

Обозначим искомую сумму через S , тогда $S = S_{55} - S_{14}$.

Найдем S_{55} и S_{14} . Имеем: $a_1 = 6$, $a_{14} = 5 \cdot 14 + 1 = 71$, $a_{55} = 5 \cdot 55 + 1 = 276$;

$$S_{55} = \frac{(6+276) \cdot 55}{2} = 7755, S_{14} = \frac{(6+71) \cdot 14}{2} = 539.$$

Таким образом, $S = 7755 - 539 = 7216$.

Замечание. Возможно использование другой формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для этого учащиеся должны установить, что разность прогрессии равна 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Правильно найден способ решения и получен верный ответ.
2	При правильном ходе решения и верном использовании формул допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом дальнейшее решение выполнено верно.
1	Ход решения правильный, но допущена ошибка в определении количества членов прогрессии n ; решение при этом доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в применении формул относятся к числу существенных, при их наличии выставляется 0 баллов.

Другое возможное решение.

Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{15} , а последний равен a_{55} .

$$\text{Имеем: } n = 55 - 14 = 41, a_{15} = 76, a_{55} = 276; S = \frac{(76+276) \cdot 41}{2} = 7216.$$

20. Найдите все значения a , при которых неравенство $x^2 + (2a+4)x + 8a+1 \leq 0$ не имеет решений.

//Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

//Решение. График функции $y = x^2 + (2a+4)x + 8a+1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a+4)x + 8a+1$ должен быть отрицателен.

$$\text{Имеем: } D_1 = (a+2)^2 - (8a+1) = a^2 - 4a + 3 < 0.$$

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Найден правильный способ решения, все его шаги выполнены верно, решение содержит минимальные пояснения, получен правильный ответ. В качестве пояснений учащийся может использовать и графическую иллюстрацию.
3	Найден правильный способ решения, все его шаги выполнены верно, получен правильный ответ, но решение не содержит никаких пояснений.
2	Ход решения верный, но допущена одна вычислительная ошибка, например, при определении знаков корней; при этом решение доведено до конца. Допускается отсутствие пояснений.
1	Ход решения верный, но в преобразовании дискриминанта допущена техническая ошибка, которая привела к громоздким вычислениям, и в силу этого решение не было доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена или в применении алгоритма решения квадратного неравенства являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Другое возможное решение. Найдем ординату вершины параболы y_0 и выясним, при каких значениях a выполняется неравенство $y_0 > 0$.

21. Имеются два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 35%, а во втором – 60% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота?

//Ответ: в отношении 4 : 1. Ответ может быть дан и в другом виде, например, $\frac{x}{y} = 4$.

//Решение.

Пусть x – масса первого сплава, y – масса второго сплава. Тогда количество золота в первом сплаве составляет $0,35x$, а во втором – $0,6y$. Масса нового сплава равна $x + y$, а количество золота в нем составляет $0,4(x + y)$. Получим уравнение $0,35x + 0,6y = 0,4(x + y)$.

После преобразований получим $35x + 60y = 40x + 40y$, $x = 4y$. Отсюда: $x : y = 4 : 1$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно составлено уравнение, при этом приведены необходимые пояснения, дан верный ответ.
3	Правильно составлено уравнение, найдено нужное отношение, дан верный ответ, но при этом отсутствуют пояснения.
2	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и в результате получен неверный ответ; ИЛИ: из равенства $x = 4y$ неверно найдено отношение $x : y$.
1	Правильно и с необходимыми пояснениями составлено уравнение с

	двумя переменными, но отношение переменных из этого уравнения не найдено.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Если в ответе указано отношение $y : x = 1 : 4$, то такой ответ может быть принят.